

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МОСТОВ

ПРИ РАСЧЕТАХ НА НАГРУЗКИ
ОТ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ПОЕЗДОВ



М. Н. Стегний
Инженер

Введение

При обоснованиях надежности несущих элементов транспортных сооружений необходимо корректно учитывать долю усилий, связанных с транспортными нагрузками. При вычислении этих усилий необходимо учитывать динамический характер взаимодействия искусственного сооружения и проезжающих по сооружению транспортных единиц.

В существующих документах принято учитывать влияние динамики в виде множителя к статической составляющей нагрузки – коэффициента динамики $(1 + \mu)$, который вычисляется по эмпирическим зависимостям. На его величину влияют следующие показатели: тип нагрузки, тип конструкции и длина участка линии влияния.

Особенность высокоскоростной поездной нагрузки заключается в том, что повторяющееся воздействие групп движущихся колесных пар может вызвать резонанс в элементах моста. Как правило, при высокоскоростном движении резонансные состояния считаются допустимыми. В этом случае

использование динамических коэффициентов, рекомендуемых нормами, является некорректным и действительные пиковые значения факторов напряженно-деформированного состояния необходимо получать из динамического расчета.

Наиболее распространенным методом динамического анализа является прямое интегрирование уравнений движения конструкции [3]: $M^*Z''^*(t+\Delta t)+C^*Z'^*(t+\Delta t)+R^*Z^*(t+\Delta t)=P^*(t+\Delta t)$ (1)

Составляющие уравнения (1) включают в себя стандартную матрицу жесткости МКЭ (R), матрицу масс (M), матрицу демпфирования (C). Программная реализация процедуры интегрирования уравнений движения (1) может быть выполнена с использованием вычислительных процедур обычного конечно-элементного пакета.

В настоящее время в большинстве промышленных систем прочностного анализа используются неявные вычислительные схемы интегрирования уравнения движения, которые требуют на каждом временном шаге решения системы линейных алгебраических уравнений. К неявным схемам следует отнести метод

линейного ускорения [2], метод Ньюмарка [2], метод Вилсона [2] и различные их модификации.

Эффективность применения неявной схемы при расчетах на подвижную нагрузку существенно зависит от структуры матрицы жесткости. Точность решения будет расти при уменьшении шага интегрирования, но в этом случае придется увеличить порядок системы уравнений, в результате времени и ресурсов компьютера на каждый шаг будет потрачено намного больше.

Оптимизация расчетной схемы

Для сокращения времени динамического расчета был разработан алгоритм уменьшения шага интегрирования без увеличения порядка системы.

Рассмотрим, из каких операций строится метод Ньюмарка [2]. Исходя из того что начальные перемещения $Z(t_{k-1})$, скорости $Z'(t_{k-1})$ и ускорения $Z''(t_{k-1})$ известны из решения в конце предыдущего приращения времени либо из начальных условий, строится разрешающая система уравнений (2) для определения перемещений $Z(t_k)$:

$$R_3 * Z(t_k) = P_3(t_k), \quad (2)$$

где

$$R_3 = R + \frac{4}{\Delta t^2} * M * + \frac{2}{\Delta t} * C, \quad (3)$$

$$P_{3k} = P_3 + M * \left(\frac{4}{\Delta t^2} * Z_{k-1} + \frac{4}{\Delta t} * Z'_{k-1} + Z''_{k-1} \right) + C * \left(\frac{2}{\Delta t} * Z_{k-1} + Z'_{k-1} \right) \quad (4)$$

Вычисление перемещения:

$$Z_k = R_3^{-1} * P_{3k}. \quad (5)$$

Вычисление ускорения:

$$Z''_k = \frac{4}{\Delta t^2} * (Z_k - Z_{k-1}) - \frac{2}{\Delta t} * Z'_{k-1} - Z''_{k-1}. \quad (6)$$

Вычисление скорости:

$$Z'_k = Z'_{k-1} + \frac{\Delta t}{2} * Z''_k + \frac{\Delta t}{2} * Z''_{k-1}. \quad (7)$$

Идея алгоритма заключается в следующем: выполнять расчет системы не только когда нагрузка приложена к узлам, но и когда она находится между ними. Для приведения нагрузки к узловой используется теорема о взаимности работ [1], которая гласит, что работа первой силы на перемещении точки ее приложения под действием второй силы равна работе второй силы на перемещении точки ее приложения под действием первой силы, т. е.

$$F_1 v_{12} = F_2 v_{21}. \quad (8)$$

В результате получаем формулу для приведения к узловой нагрузке (рис. 1).

$$F_n = F * v(x), \quad (9)$$

где F – значение исходной нагрузки, $v(x)$ – значение функции формы конечного элемента в точке приложения исходной нагрузки (табл. 1).

Таким образом, на каждом временном шаге мы определяем положение силы и аппроксимируем ее значение через уравнения кривых.

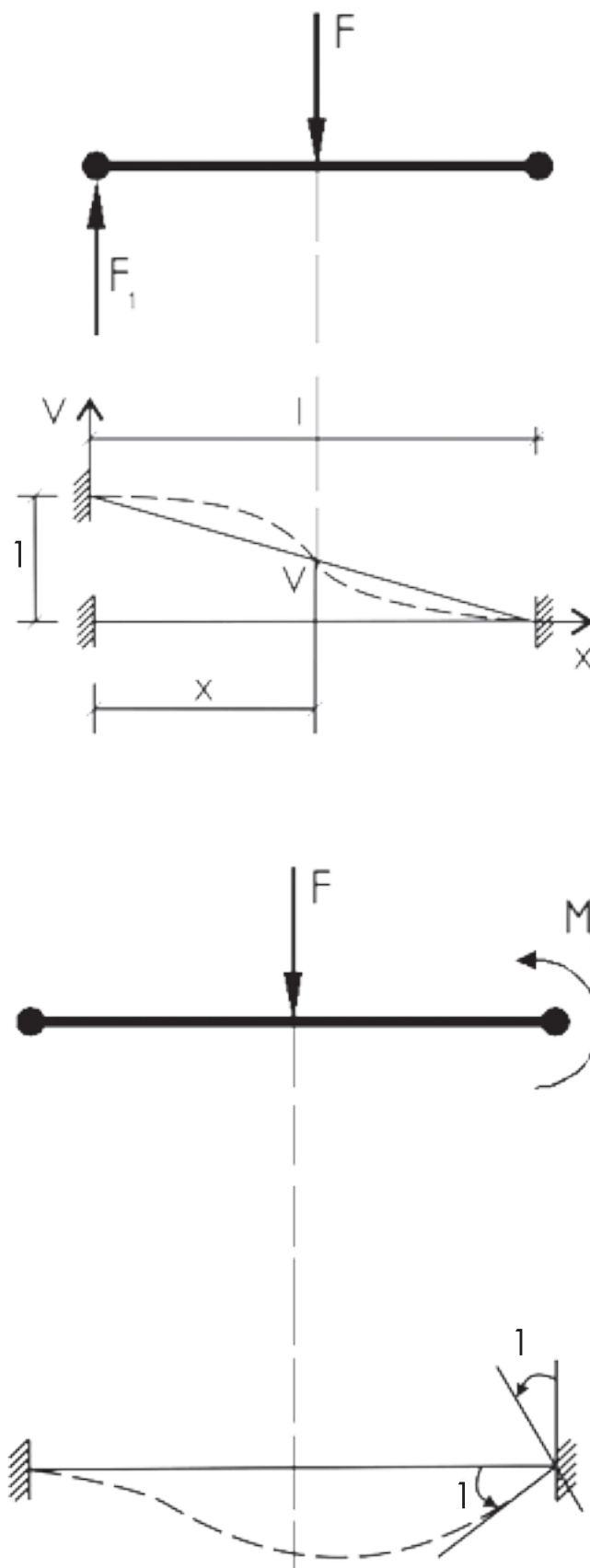
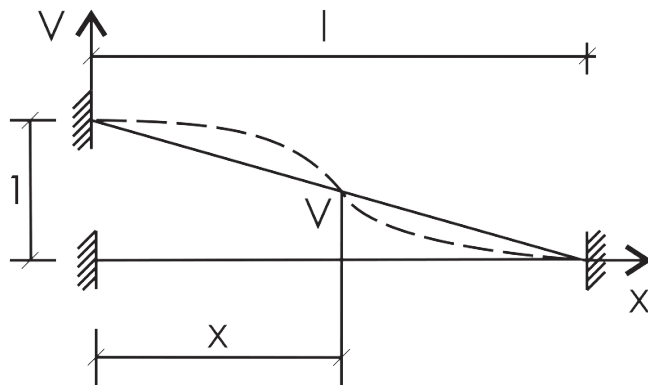


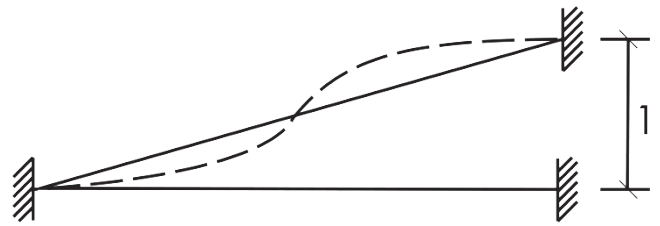
Рис. 1. Приведение нагрузки к узловой

Таблица 1.

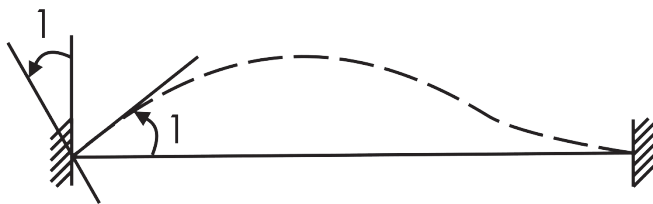
Функции формы плоского стержня



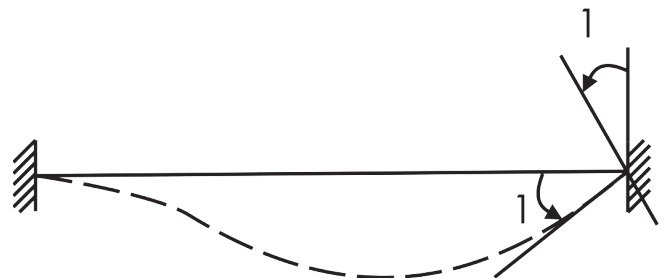
$$v(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$$



$$v(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}$$



$$v(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$



$$v(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

Тестирование алгоритма выполнялось на примере шарнирно опертой балки со следующими характеристиками (**рис. 2**):

$l = 16,5$ м (длина балки),

$E = 209 \times 10^9$ Н/м² (модуль упругости),

$F = 0,538 \times 10^{-2}$ м² (площадь поперечного сечения),

$I = 0,984 \times 10^{-4}$ м⁴ (момент инерции),

$\rho = 0,795 \times 10^4$ кг/м³ (плотность материала).

Рассматривалось движение груза $P = 1$ Н с постоянной скоростью V . За эталонное решение было принято решение, предложенное академиком А. Н. Крыловым. Согласно этому решению

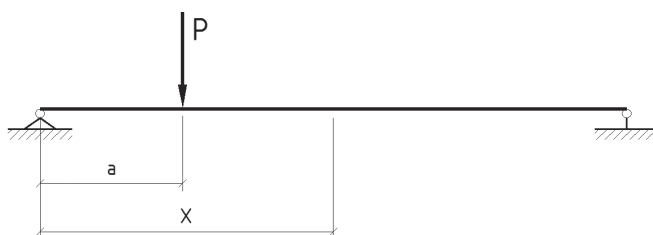


Рис. 2. Расчетная схема

прогиб для шарнирно опертой балки в сечении с координатой x и положением груза с координатой a описывается выражением:

$$y(x, a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P\delta}{k^4(1-\beta_k^2)} \sin \frac{kx\pi}{l} \left(\sin \frac{ka\pi}{l} - \beta_k \sin \frac{ka\pi}{\beta_k l} \right), \quad (10)$$

где

$$\beta_k = \frac{Vl}{k\pi \sqrt{\frac{EI}{m}}}, \quad (11)$$

δ — прогиб среднего сечения балки от $P = 1$ Н,
 m — погонная масса.

Решив уравнение при скорости $V = 26$ м/с, получаем максимальный прогиб $\omega = 5,02 \times 10^{-6}$ м, при $a = 0,6625l$ (**рис. 3**).

Из сравнения результатов (**рис. 4, 5**) видно, что при разбишке элементов на 2–4 участка точность решения вполне приемлема для практических расчетов. Погрешность решения связана не только с приближенностью дискретизации, но и с использованием точечных масс.

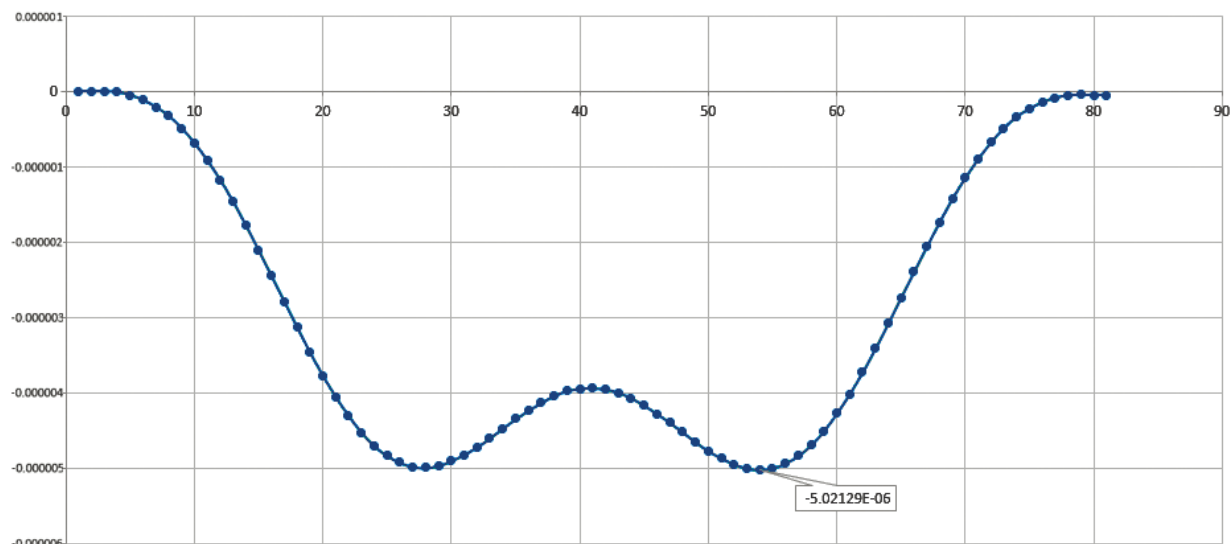


Рис. 3. Перемещения среднего узла балки. Аналитическое решение

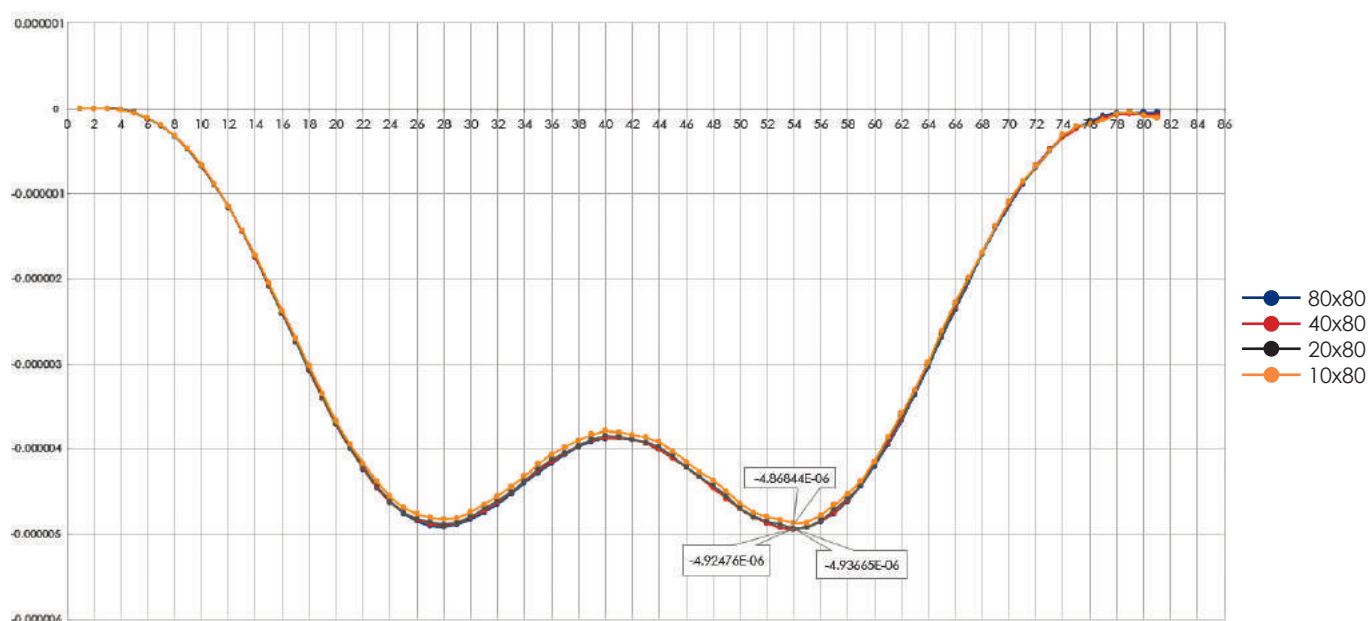


Рис. 4. Перемещения среднего узла балки. Сравнение результатов расчета с использованием алгоритма понижения размерности. Обозначения: 10 × 80 – 10 конечных элементов, 80 шагов интегрирования

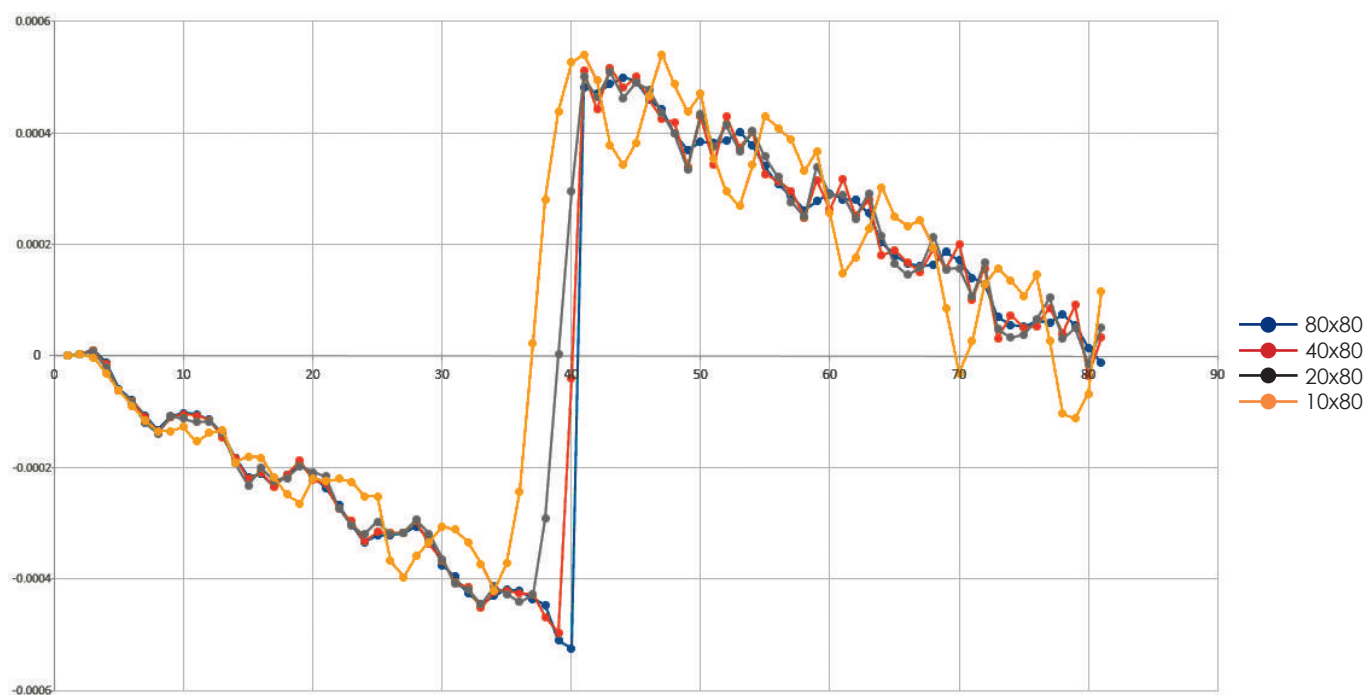


Рис. 5. Поперечная сила для среднего элемента балки

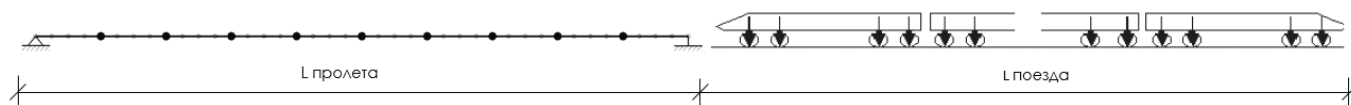


Рис. 7. Длина линии влияния

«Динамические» линии влияния

При динамическом анализе транспортных сооружений возникает необходимость определения перемещений и усилий от большого количества поездов с различными скоростями. Эта процедура занимает много времени, так как для каждого поезда и соответствующей ему скорости нужно решать уравнение (1).

В целях сокращения времени предлагается следующая последовательность действий (рис. 6): строится разрешающая система уравнений (2), задаются начальные условия (скорость, константы интегрирования), в качестве нагрузки используется единичная сила. Начальные условия (величина шага, количество шагов) нужно задать с учетом того, что длина линии влияния будет равна сумме длин моста и поезда (рис. 7), а в некоторых случаях, при исследовании «отрицательной» динамики, — больше этой суммы. Таким образом, интегрирование уравнения (1) будет продолжаться даже при отсутствии нагрузки.

На загрузку линий влияния тратится гораздо меньше времени, чем на решение системы уравнений. Задача сводится только к построению линий влияния для различных скоростей и загрузке их.

Выводы

1 Непосредственное применение неявных методов для расчета сооружений на высокоскоростную нагрузку неэффективно из-за больших временных затрат.

2 Использование алгоритмов понижения размерности и «динамических» линий влияния при сохранении устойчивой сходимости решения значительно сокращает время решения.

Литература

1. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика: Учебник. 11-е изд., стер. СПб.: Лань, 2008. 656 с.
2. Klaus Bathe, Edward Wilson. Numerical methods in finite element analysis. М., 1988. 639 с.
3. Киселев В. А. Строительная механика: Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений. Учебник для вузов. М.: Стройиздат, 1980. 616 с.



Рис. 6. Алгоритм определения перемещений и усилий на нагрузки от высокоскоростных поездов